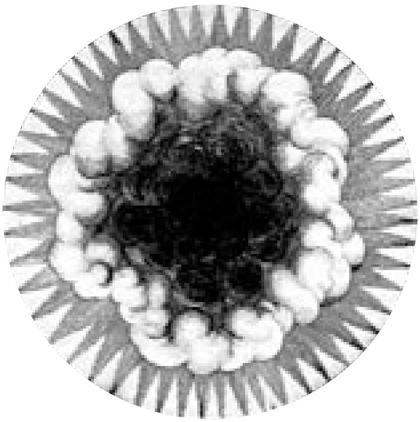
Geometría hiperbólica

por Pedro E. Díaz Saenz de Sicilia



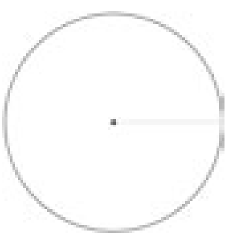
El mundo en que vivimos es percibido por todos nosotros a través de la geometría euclidiana, que, como su nombre lo dice, fue desarrollada en el siglo IV a.C. por Euclides de Alejandría. También se le conoce como geometría neutral[1] o geometría del ángulo recto. Esto porque parte de cinco postulados o axiomas, que son verdades «obvias». A partir de éstos se comienza a construir toda la geometría por medio de afirmaciones que luego deben demostrarse, ayudándose de los axiomas; además,

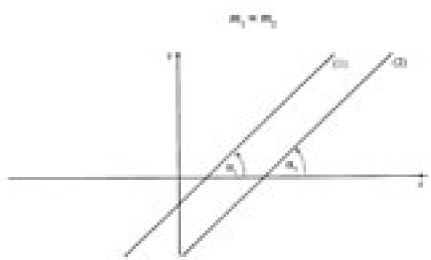
1 Marvin J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries,* Nueva York: Freeman, 1994; p. 102.

todo lo que ya se probó se puede usar para futuras demostraciones. Tales postulados son los siguientes:[2]

1. un punto dado puede unirse con otro a través de una línea recta.
2. una recta cualquiera puede prolongarse indefinidamente.
3. un círculo se puede dibujar a partir de cualquier centro y con cualquier distancia —o radio.
4. todos los ángulos rectos —de 90º— son iguales.
5. dada una recta y un punto fuera de ella, sólo puede existir una única paralela —en relación a la recta dada— sobre ese punto —cabe señalar que existen muchos enunciados equivalentes al quinto y que en este artículo se utilizarán distintas versiones; la anterior tampoco es la versión original de Euclides.[3]

Pero los matemáticos siempre dudaron de la obviedad de «el quinto» —que es como se le conoce al último postulado de





2 Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, vol. I y II, Nueva York: Dover, 1956; p. 154.

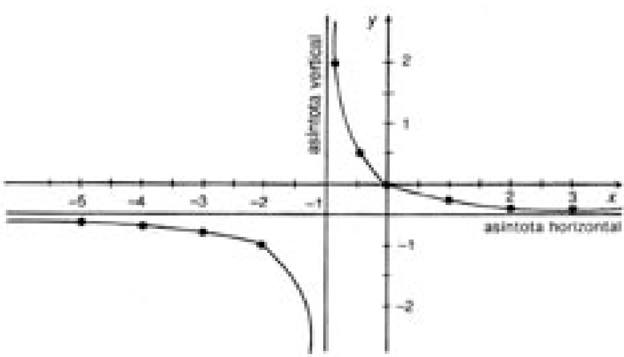
3 El enunciado de Euclides es el siguiente: «[Postúlese] Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [ángulos] menores que dos rectos».

Euclides—, por tanto, se dieron a la tarea de encontrar las pruebas de su existencia o de su no existencia. Sin embargo, fue hasta el siglo XVIII que Girolamo Saccheri pensó atacar el problema con un enfoque distinto: partir de un postulado erróneo para llegar a una contradicción —este método se conoce como *reductio ad absurdum*, «reducción al absurdo».

De modo que, si del quinto postulado se deduce que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°, hay dos caminos posibles para la proposición absurda —o negación de la proposición original—:

a) que los ángulos interiores sumen más de 360° —lo que posteriormente llevaría al desarrollo de la geometría elíptica o *riemanniana*, misma que ayudaría a construir la teoría de la relatividad de Einstein,[4] ya que todo en esta geometría se trabaja sobre un espacio donde no hay paralelas.

b) que los ángulos interiores sumen menos de 360°, que fue por la que optó Saccheri.



4 Thomas L. Heath, *op. cit.*; p. 292.

En 1733 Girolamo escribe un libro para limpiar el nombre de Euclides y confirmar por fin que la geometría euclidiana se mantiene. Se puso a trabajar sobre la hipótesis de que la suma era menor a 360° y, en su afán de encontrarse con una contradicción, descubrió un mundo nuevo que él mismo describió como «aberrante y lleno de pecado».[5] De modo que continuó buscando la contradicción, pero mientras más lo hacía más se enredaba dentro de un complejo espacio, ajeno y extraño.

Realmente hay que ponerse en los zapatos de Saccheri para poder entender su sobresalto —figura 1—. Echó un vistazo a un mundo donde no sólo hay una línea paralela, conforme al *quinto euclidiano*, sino una infinidad. Esto puede sonar raro para aquellos que desconocemos las consecuencias que implica, por lo que, para hacerlo más tangible, hay que pensar en un mundo donde no hay rectas: una regla de 30 centímetros en dicho mundo se volvería una curva —o sección hiperbólica— de 30 centímetros, ¡pero los centímetros no estarían distribuidos uniformemente!

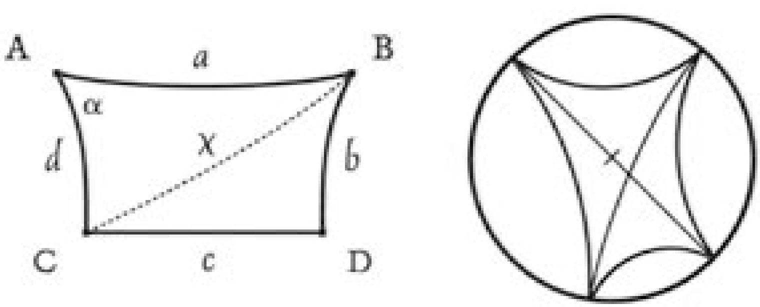


figura 1: *Cuadrilátero* de Saccheri.

5 Girolamo Saccheri, *Euclid Freed of All Blemish*, Pavia: Chelsea, 1733; p. 7.

Cabe señalar que Saccheri nunca reclamó su descubrimiento, y que la geometría hiperbólica nunca fue reconocida como tal hasta el siglo XIX, con los trabajos que desarrollaron simultáneamente Gauss, Bolyai y Lobachevsky[6] —la geometría hiperbólica también recibe el nombre de geometría de Lobachevsky.

En el mundo hiperbólico existen dos tipos de paralelas: las divergentes, de las cuales hay una infinidad por cada recta dada en el plano hiperbólico —a partir de ahora me referiré a éstas como rectas, simplemente— que siempre se alejan entre sí; y las paralelas límite, que son únicas y tienen un comportamiento asintótico[7] —las asíntotas siempre se acercan pero nunca se cortan—, de ahí el nombre de paralelas límite, porque son el límite de lo que se puede considerar paralelo, sin ser divergente.

Este comportamiento asintótico está determinado por un ángulo conocido como ángulo de paralelismo, que está relacionado con la distancia *d* en la figura 1. Si la recta *a* fuera paralela límite de *c*, entonces *alfa* es el ángulo de paralelismo —para verlo más

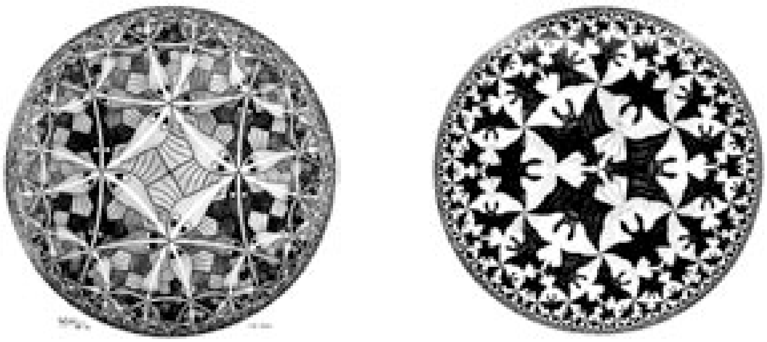


figura 2: M. C. Escher, *Circle limits III y IV*, 1959.

6 *Idem.*

7 Greenberg, *op. cit.*; p. 200.

gráficamente supongamos que hay dos personas en un espacio hiperbólico, si estas personas caminasen lado a lado en línea recta, caminarían sobre una paralela límite toda la vida y nunca percibirían que se están acercando asintóticamente, ya que ante sus ojos siempre estarían a la misma distancia el uno del otro. ¿Por qué?, se podría decir que estas personas se encogen proporcionalmente, por lo que no perciben ni su proximidad ni su encogimiento. Para hacerlo más visible tomemos los *Límites circulares* de M. C. Escher —figura 2—, que también están relacionados con el tema. Es claramente visible que las estructuras creadas por el *genio* de Escher pueden interpretarse dentro del campo de las matemáticas, es manifiesta la similitud entre la figura 1 y sus obras de arte, que se entienden mejor bajo el concepto de paralelas límite.

Para ayudarse a interpretar el mundo hiperbólico, los matemáticos se apoyaron en construcciones teóricas conocidas como *modelos*. Fue gracias a estos modelos que se pudo desarrollar una métrica hiperbólica; la métrica es lo que nos permite aplicar a la realidad los constructos geométricos que se originan teóricamente. La complejidad de la métrica hiperbólica excede las pretensiones de este artículo, pero podemos decir que es como hacer matemáticas basados en la regla hiperbólica de 30 centímetros antes mencionada, y de ahí comenzar con la construcción del resto del cuerpo matemático, es decir figuras, funciones —como las trigonométricas—, etcétera. De modo que se han encontrado aplicaciones de la geometría hiperbólica en los campos de estudio más diversos, desde la astronomía, pasando por la informática y hasta llegar a las redes neuronales de nuestro cerebro.[8]

En la astronomía se ha descubierto, debido a las magnitudes que se manejan, que es más conveniente usar la geometría hiperbólica

8 *Ibid.*; p. 293.

que la euclidiana; también ha surgido una pregunta que no ha tenido respuesta, ¿es el universo hiperbólico o elíptico?, de esta respuesta dependería saber si el universo está en continua expansión o algún día existirá el famoso *Big Crunch*. R. K. Luneburg escribió en 1947 un artículo donde sostenía que el espacio visual en nuestro cerebro se describe mejor por la geometría hiperbólica. En la informática, debido a la complejidad de las ramificaciones —parecidas a las de nuestro cerebro—, se ha pensado en soluciones hiperbólicas.

Estos son sólo unos ejemplos con fines de divulgación científica. Resultó ser verdad lo que nos decía nuestro profesor de matemáticas: las matemáticas están en todas partes.